第７章　運動

～微分・積分の基本概念～

微分・積分と聞いただけでアレルギー反応を起こす人のために、この章では運動という具体例を用いてこの概念について説明することにしよう。なるべく微分・積分アレルギーを緩和させるように書いたつもりであるが、数学における一大分野である微分・積分に関して、この章で体系的に十分な説明を与えるのは量的な制約上不可能であるから、もしかしたらアレルギーを悪化させることになったかもしれない。その場合は適当な数学の教科書で微分・積分についての知識を補っていただければと思う。

この章で扱うことは基本的に数学的で、物理的な時間や空間の微妙なことは考えないことにし、時間の流れや空間の尺度は変化せず一定であると見なせることにしよう。

7.1 現象の記述

一般に物体の状態は時間の経過に伴い様々に変化する。物理学の基本課題はこのような物体の変化を支配する法則を発見することにあるが、そのためにはそれらの変化を記述し、記録する方法がなければならない。まずは物体の変化を量的に記述するための方法が必要である。一般にすべての現象を量的に記述することは可能であろうが、すべての現象を量的に測定することは可能ではない。例えば、人の心の変化を量的に測定することは現代の技術ではほとんど不可能であるし、極めて短い時間に起こる衝突に関する物体の変化を測定することも難しい。すなわち、物体の変化を量的に記述するためには、何らかの測定をせねばならず、この測定の精度が十分でなければ、物体の変化を量的に精確に記述することはできない。物体の変化を量的に記述できなければ、それを支配する法則を発見す

ることもできないから、物理学では、その時点で、物体の変化を量的に記述できるもののみを取り扱うことにしているようである。

　また、対象としたい物体の変化量は直接測定できないが、間接的な量を測定することはできるという場合も多い。例えば、重力場の強さを測るには、重力場内に物体を持っていき、それに加わる加速度を計測することによって重力場の強さを測ることができるが、本当に知りたいものは何が物体を加速させるのかということである。しかし、この直接的な量を測った人はいない。人の心の変化は直接測ることは現時点ではできないが、嘘発見機のように人体に取り付けた電極などに流れる電気量の変化を測定することによって、その人の心に何らかの変化があったことを想像することはできる。このような方法も間接的な方法によって測定しようとしているものである。

　一般的に、測定には幾つかの物理量に対応する物理量を測定するという方法が取られる。幾つかの物理量に対応する物理量の間の関係は数学的には関数関係で結びつけられているということができる。

　関数の記述方法の重要なものは次の３種類である。

(1) 表による表現

　測定されるデータを表形式で記入することによって得られる関数表現である。測定中の段階においては、この方法が取られることが多い。

(2) グラフによる表現

　測定されたデータをグラフ形式で表現することによって、その幾何学的な特徴を知ることができる有効な方法である。また、地震計などは測定されるデータが直接グラフ形式で取得される。

(3) 解析的表現

関数関係が方程式によって表現されることを解析的に表現されたという。関数の方程式とそのグラフは１対１に対応するから、関数のグラフによる表現から直接的に解析的表現が得られる場合も多い。このような方法を取るためには関数のグラフの形を知っている必要がある。実験測定による関数が解析的に表現されたような場合は、一つの法則を発見したことになる。このようにして得られた法則を実験法則という。このような法則というものは多く、法則発見の基本的な方法であると言える。

形式的な表現として、関数を解析的に表現できないような場合でも、

$$y = f(x) \quad \text{または} \quad F(x,y) = 0$$

などと書いて関数を表現することもある。

7.2 微分の基本的な概念

物体が運動しているとき、それを記述するにはどうすればよいか。物体の位置を記述するには、われわれの空間は三次元であるから、３点必要である。例えば、デカルトの座標系における位置は (x_1, y_1, z_1) などとして３点与えれば、基準となる座標系の原点からの相対的な位置を記述することができる。

物体の位置に対応する時間を記述するには、任意の基準の時刻からの経過時間を測定すればよい。

三次元空間で位置を記述するには３点必要であるが、三次元空間というものは、二次元の紙には書けないので、空間と時間の関係を幾何学的に表現することは不可能である。立体的に見える絵というのは錯覚であって現実ではない。幾何学的に表現するということ

は、視覚的に現象を理解できるので有用な方法である。空間的に一次元の運動であれば、時間と併せて二次元であるから、紙に書くことができる。現象を理解しやすくするために、しばらくは、直線上を運動するような一次元の運動について考えることにしよう。この一次元の運動というのは、三次元の運動を考える上で役に立たないというものではない。三次元の運動は３つの一次元の運動に分割して表現することができるからである。

いま、直線上を運動している自動車があるとし、この自動車の走行した距離sと時間tを同時に記録していくことにする。このとき、sとtの間には関数関係があり、

$$s = f(t)$$

と形式的に書くことができる。

この関数の特別な場合であるsとtが比例するような場合のグラフは、いわゆる一次関数のグラフであり、等速直線運動のグラフである。

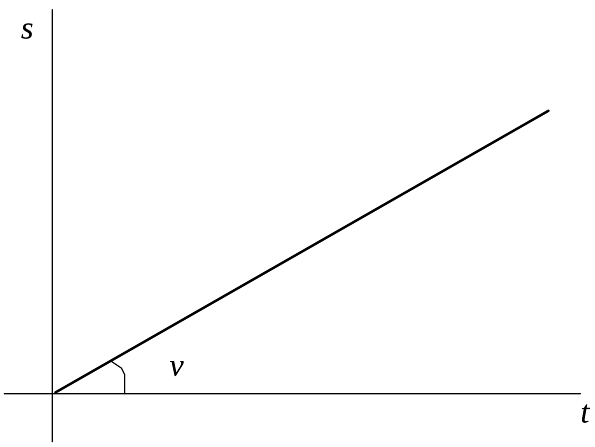

図7.1 距離と時間の比例関係

この直線の傾きをvと書けば、s, tの初期値をゼロとしたグラフの解析的な表現は、

$$s = vt \quad \text{あるいは} \quad v = \frac{s}{t} \tag{7.1}$$

と書くことができる。このvは、距離の変化量sの時間tに対する比であり、vが大きいほど時間の経過に対するsの変化が大きいことを表すものであり、vがゼロであれば、tに対するsの変化もゼロである。この比vは時間tに対する距離の変化量を表しているものであり、このような量は速度とよばれている。ここでの変数である距離と時間は、場所と時刻ではないことに注意しよう。後に微少距離や微少時間というものを考えるが、点である場所や時刻に対して微少場所や微少時刻という概念はまったく無意味であるからである。

　このような式(7.1)の関係は、一般的な場合である時間と距離が比例しない場合、すなわち、vが一定ではない場合には適用できない。時間の変化に対して、距離の変化は一定ではないからである。一般の場合に適用するにはどのようにすればよいのだろうか。距離sと時間tの一般的なグラフは例えば、図7.2のように表すことができる。

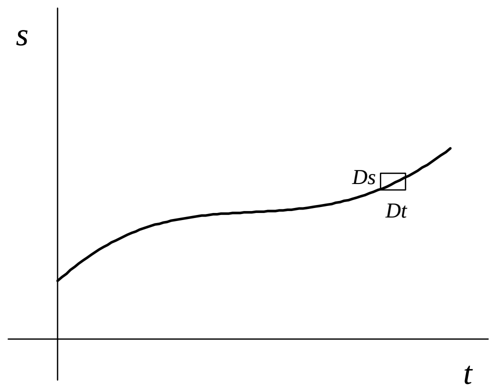

図7.2 距離と時間の関係

このグラフ上の一点を顕微鏡で見るように拡大し、その倍率を上げていけば、このグラフは部分的に直線のグラフであると見なすことができる（図7.3)。

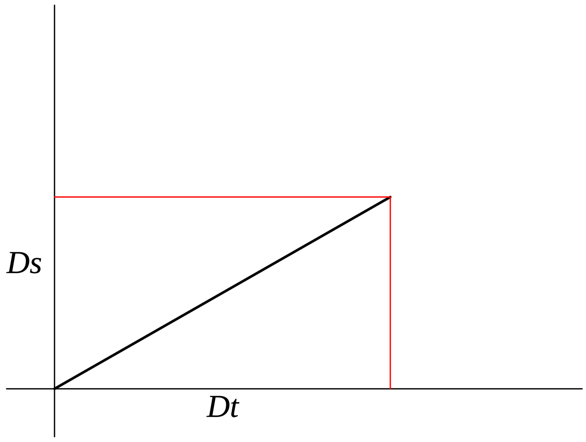

図7.3 微少距離と微少時間の比例関係

このことは、例えば、地球の表面は球面であるが、地球に対して十分小さいわれわれにとっては、平面と見なすことができるということと同じである。このような局所的なグラフは、図7.1のようなグラフと同じ形式であると見なすことができるから、その点の速度は、微少距離をDs、微少時間をDtとすれば、

$$Ds = vDt \tag{7.2}$$

と書くことができる。

このような操作をグラフ上の各点において行えば、それぞれの点での傾きである速度を求めることができる。

いま、Dtが限りなくゼロに近づくとすれば、式(7.2)は厳密に成り立つ。数学的表現を使えば、

$$v = \lim_{Dt \to 0} \frac{Ds}{Dt} = \frac{ds}{dt} \qquad (7.3)$$

と書かれる。この$\frac{ds}{dt}$という量をtに関するsの導関数といい、この計算をすることを微分するという。$\frac{ds}{dt}$は、$s', f'(t), \frac{d}{dt}f(t)$などと書かれることもある。$dt$は限りなくゼロに近づく量であり、これを極小時間とよべば、この極小時間dtに対応する極小距離dsとの関係は、

$$ds = vdt \qquad (7.4)$$

と書くことができる。この式は厳密に成り立つ。

7.3 関数と増分

１つの変数からなる関数は、

$$s = f(t) \qquad (7.5)$$

と抽象的に書くことができた。
変数の増分という量を定義すれば、

$$\Delta t = t_2 - t_1 \qquad (7.6)$$

ただし、t_2, t_1はtの一つの値

と書くことができ、この変数の増分という量も式(7.5)を満たすから、この量を使って式(7.5)を書けば、

$$\Delta s = f(\Delta t)$$

と書くことができる。この式と式(7.5)を片々加え合わせれば、

$$s+\Delta s=f(t+\Delta t) \tag{7.7}$$

という形式的な関数関係が得られる。

7.4 微分計算の基本手法

式(7.7)の関係を用いて一つの関数を例にとり、微分計算をしてみよう。いまsとtが次のような関数関係で結ばれているとする。

$$s=f(t)=at^2+bt+c \tag{7.8}$$

このとき$\frac{ds}{dt}$を求めよう。

式(7.8)は式(7.7)から次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} s+\Delta s &= a(t+\Delta t)^2+b(t+\Delta t)+c \\ &= at^2+bt+c+b\Delta t+2at\Delta t+a(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

ここで、$s=at^2+bt+c$　であるから、

$$\Delta s=b\Delta t+2at\Delta t+a(\Delta t)^2$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=b+2at+a\Delta t$$

と書くことができる。このΔtを限りなく0に近づけた極限が微分であるから、

$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=b+2at$$

となる。このようにして微分は計算できる。

7.5 微分の定義

よく知られる微分の定義の式を式(7.7)から導こう。式(7.7)より、

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - s$$

であるが、$s = f(t)$ であるから、

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

両辺をΔtで割って、

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

式(7.3)の定義より、

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \qquad (7.9)$$

よって、微分の定義の式が導かれた。

7.6 微分公式

7.4の方法を用いて得られる微分の計算結果などの主な公式をここで列記しておくことにしよう。

関数	導関数		
$y=kf(x)$	$y'=kf'(x)$	ただし、kは定数	(7.10)
$y=f(x)+g(x)$	$y'=f'(x)+g'(x)$		
$y=f(x)-g(x)$	$y'=f'(x)-g'(x)$		
$y=f(x)g(x)$	$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$		
$y=\frac{f(x)}{g(x)}$	$y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$		

$y=k$	$y'=0$	ただし、kは定数
$y=x^a$	$y'=ax^{a-1}$	ただし、aは定数
$y=e^x$	$y'=e^x$	ただし、$e=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t$
$y=\log\lvert x\rvert$	$y'=\frac{1}{x}$	
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	
$y=\tan x$	$y'=\frac{1}{(\cos x)^2}$	

7.7 三次元での微分

一次元の速度は式(7.3)のように表すことができた。三次元の空間を運動する物体の速度は、この一次元の速度を三つ書けばよいだけである。物体の時間tに対するx座標における変化を測定することによって得られる速度v_xは、

$$v_x=\frac{dx}{dt}$$

である。同様にして、y,z座標では、

$$v_y=\frac{dy}{dt}$$
$$v_z=\frac{dz}{dt}$$

と書くことができる。すなわち、速度vは、

$$v=f(v_x, v_y, v_z)$$

であり、v_x, v_y, v_z を個別に求めれば、v は決定される。この速度v をベクトルの形で書けば、

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

であり、$\boldsymbol{v}$の大きさ$|\boldsymbol{v}|$は、

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

である。

7.8 ベクトルの微分

位置ベクトルは、$\boldsymbol{r}=r_x\boldsymbol{i}+r_y\boldsymbol{j}+r_z\boldsymbol{k}$ と表されるが、r_x はx 座標の値を表していたから、r_x をxで書けば、位置ベクトルは、

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

と書くことができる。ベクトル$\boldsymbol{r}$が時間t の関数であるとして、tで微分できるとすれば、$\frac{dx}{dt}$は、ベクトル$\boldsymbol{r}$ のx 成分の時間微分の成分である。この成分に単位ベクトル$\boldsymbol{i}$を掛けると、この量$\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}$ はベクトル$\boldsymbol{r}$ のx 成分の時間微分ベクトルである。同様に、y, z 成分は、$\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}, \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$ で

あり、これら３つのベクトルの和が、ベクトル$\boldsymbol{r}$の時間微分のベクトルであると考えることができる。このベクトルを$\boldsymbol{r}'$と書けば、

$$\boldsymbol{r}' = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$$

である。この$\boldsymbol{r}'$を$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$と書けば、

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{v} \qquad (7.11)$$

と書くことができる。ベクトルというものをx, y, z成分に分ければ、それらはスカラーになり、それぞれのスカラーに対応する成分の単位ベクトルを掛ければ、その方向のベクトルになる。ベクトルの微分は、スカラーの微分に帰結することができ、その計算結果をベクトルに戻すこともできるから、スカラーに対する微分公式は、すべてベクトルに対しても適用することができる。

7.9 定積分の基本的な概念

速度は式(7.3)のように、

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad 再(7.3)$$

と書くことができるが、微分ではs, tからvを求めたが、逆にvがわかっている場合にsを求めるのにはどのようにすればよいのだろうか。式(7.2)の近似的表現によれば、

$$Ds = vDt \qquad 再(7.2)$$

と書くことができた。このことから、微少距離Dsは微少時間Dtとその時間に対応するvとの積であることは直ちにわかるから、微少距離を求めたい区間で加えていけば、距離sを求めることができる。求めたい区間とは、例えば、ある時間間隔Δtの間ということであり、この間に動いた距離Δsを求めることになる(図7.4)。

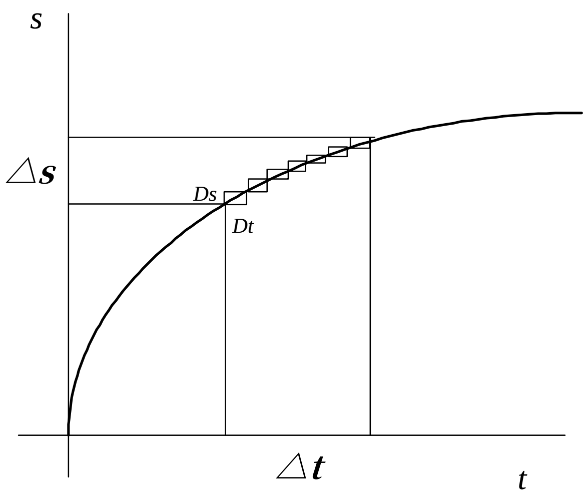

図7.4 微少時間の和と微少距離の和

Δtは幾つかの微少時間に分割することが可能であるから、n個の微少時間に分割すれば、Δtは、

$$\Delta t = Dt_1 + Dt_2 + ... + Dt_n \tag{7.12}$$

と書くことができる。それぞれの微少時間に対応する傾きである速度vはこの場合与えられているものであり、vはtの関数と見なせるから$v(t)$と書けば、この$v(t)$と対応する微少時間との積がそれぞれの微少距離に対応する。したがって、距離Δsはそれらの和であり、

$$\Delta s = v(t_1)Dt_1 + v(t_2)Dt_2 + ... + v(t_n)Dt_n \tag{7.13}$$

とすれば求めることができる。各微少時間の間隔が等しいとすれば、分割の個数nが大きければ大きいほど、より精確にΔsを求めることができる。このことは微分の場合と同じように分割の個数を上げるほど、式(7.2)の近似の精度を上げることができるからである。すなわち、精確にΔsを求めるには、$n \to \infty$にすればよいから、

$$\Delta s = \lim_{n\to\infty} v(t_1)Dt_1 + v(t_2)Dt_2 + ... + v(t_n)Dt_n \qquad (7.14)$$

とすればよい。この式を使えば、解析的に表現できないような複雑な関数$v(t)$（例えば、グラフで取得したデータなど）であっても、tを与えることで$v(t)$が得られ、$n \to 100$とか$n \to 1000$などの適当な条件を与えて、面倒な計算をすれば、近似的にΔsを求めることができる。このような計算をすることを数学では積分するといい、時間間隔Δtを$\Delta t = t_2 - t_1$と書き、その時間に対応する距離を$\Delta s = s$とすれば、式(7.14)のような計算を、数学では、

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \qquad (7.15)$$

と書き、このような計算を定積分という。

7.10 原始関数と導関数の関係

導関数を導出する前の関数を原始関数というが、この原始関数と導関数の関係について考えよう。例えば、距離は時間の関数

$$s = f(t)$$

であると考えることができるが、このsをtで微分した導関数は速度で、

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t)$$

と書くことができる。このとき、$f(t)$は$v(t)$の原始関数である。このようにして得られた$v(t)$は、$s = f(t)$のグラフのそれぞれの時間における傾きを表していた。横軸にt、縦軸に$v(t)$をとりグラフを書けば、このグラフは、それぞれのtに対応する傾きのグラフになる。式(7.2)で表されるように、この傾きである$v(t)$と微少時間Dtの積は、微少距離Dsになり、$v(t)$とDtの積というものはそれらを辺とする長方形の面積になるから、この微少距離Dsは、$v(t)$とDtのつくる長方形の面積になる。7.9と同じように、Δtは式(7.12)で表され、Δsは式(7.13)と書くことができるから、全く同じようにして、式(7.14)を得ることができる。したがって、関数$v(t)$を積分することの幾何学的な意味は、関数$v(t)$とt軸に囲まれた部分の面積を求めることであり、その面積は距離sを表す(図7.5)。

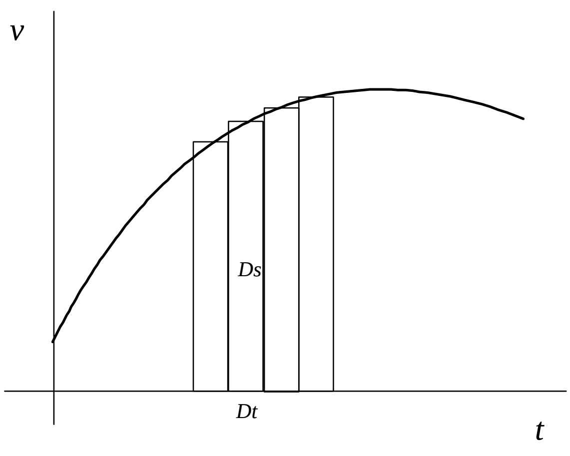

図7.5 積分の幾何学的な意味

7.11 不定積分の計算

原始関数が

$$s = f(t)$$

で与えられる場合のtで微分した導関数$v(t)$は、

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t)$$

であるが、導関数$v(t)$を不定積分するとは、微分の逆の計算を行うことであり、原始関数を求める計算をするということである。不定積分とは、

$$\int f'(t)dt = \int \frac{ds}{dt}dt = \int \frac{df(t)}{dt}dt = f(t) \qquad (7.16)$$

の計算を行うことであると定義されている。例えば、原始関数が、

$$s = f(t) = t^2$$

であれば、tで微分した導関数$v(t)$は、

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt} = 2t$$

である。この$v(t)$を積分すると、原始関数になるのであるから、

$$\int v(t)dt = s = f(t) = t^2$$

として求めることができる。この場合$v(t) = 2t$であったから、

$$\int 2t dt = t^2$$

であり、$2t$をtで積分するとt^2になるということがわかった。積分の基本的な計算はこのような逆算的な方法によって求められるものである。ただし、定数を微分すると0になるから、積分の計算は一般に一つに決まらない。例えば、原始関数が、

$$s = t^2 + c \qquad \text{ただし、} c \text{は任意の定数}$$

であれば、この関数を微分すると、

$$\frac{ds}{dt} = 2t$$

となるから、この関数を積分すると、

$$\int 2t dt = t^2 + c$$

であるとせねばならない。このcは積分定数とよばれているものである。積分定数は物理的には初期値の設定という任意性のある条件によって決定される。例えば、実験などで測定する時間の初期値を現在時刻にし常に計測中時刻によって記録するのか、あるいはストップウォッチなどを使用し初期値をゼロとしてから記録するのかは、観測者の判断による。この初期値の設定の仕方によって当然結果は変わってくるから、数学的にもこのような任意性のある値が現れてくるのは当然のことである。

7.12 定積分と不定積分の関係

定積分の特別な形として$t=c$（cは任意の定数）から変数tまでの定積分は、

$$s=\int_c^t v(t)dt \tag{7.17}$$

と書くことができるが、区間$[c,t]$が連続であれば、この定積分は不定積分であると見なすことができる。すなわち、

$$s=\int_c^t v(t)dt=\int v(t)dt \tag{7.18}$$

と書くことができる。定積分の定義から、

$$\int_c^t v(t)dt=\int_c^a v(t)dt+\int_a^t v(t)dt \qquad a\text{は任意の定数}$$

の公式が成り立っていることはただちにわかる。このことは定積分の区間を分割したにすぎないからである。aは任意の定数であるから、0と置けば、

$$\int_c^t v(t)dt=\int_c^0 v(t)dt+\int_0^t v(t)dt \tag{7.19}$$

と書くことができる。この式の右辺第１項は、任意の定数を用いた定積分であり、区間$[c,0]$は連続であるから、計算すれば任意の定数になる。この定数をCと置けば、

$$\int_c^t v(t)dt=C+\int_0^t v(t)dt \tag{7.20}$$

と書くことができる。すなわち、不定積分は任意の定数Cとより限定的な右辺第２項の和として表現することができる。

右辺第２項の計算結果には積分定数は現れない。例えば、$v(t)=2t$ として計算すれば、

$$\int_0^t 2tdt = [t^2]_0^t = t^2$$

となる。この結果は、不定積分の積分定数を省略した形と同じであるから、この形の数学的な意味は、0 から変数 t までの定積分である。このような積分は、定積分と不定積分の中間的存在で、限定積分とよんでおくことにしよう。式(7.20)のような書き方はやや煩わしいのでその記法として、

$$\int_0^t v(t)dt \equiv \int_0 v(t)dt \tag{7.21}$$

と書くことにしよう。この本ではさらに、

$$\int_0 v(t)dt \equiv \int v(t)dt \tag{7.22}$$

と書かかれることもある。

不定積分というものには積分定数が入り込んでくるために、微分の逆の計算であると厳密に言うことはできない。例えば、t^2 を微分すると何の任意性もなく、$2t$ になるが、$2t$ を不定積分すると t^2+c となり、t^2 に等しくないからである。それに対して、$2t$ を限定積分すれば、何の任意性もなく、t^2 になるから、限定積分は微分の逆の計算であると厳密に言うことができる。このように任意性がないということは物事を明確に表現するという点で都合がいいだろう。ただし、区間 $[0,t]$ が連続でなければならないという制約はある。

7.13 ゼロの積分

積分は微分の逆の計算であるが、このような概念に従わないものがある。任意の定数を微分すると0になるが、0を積分すると何になるのだろうか。積分は微分の逆の計算であると考えると、0を積分すると任意の定数になるはずであるが、不思議なことに0を積分しても任意の定数にはならない。導関数が0ということは、例えば、速度の関数が$v(t)=0$と表されるということである。横軸に時間tをとり、縦軸に$v(t)$をとれば、$v(t)=0$のグラフは、t軸に重なった直線である。tのあらゆるところで$v(t)$はゼロになるから、この$v(t)=0$をtのどの区間で積分しても、$v(t)$とt軸に囲まれる領域の面積は0である。したがって、

$$\int 0dt = 0 \qquad (7.23)$$

であり、0を積分すると0になる。

7.14 積分公式

7.11の方法などを用いて得られる積分に関する公式をここでまとめておくことにしよう。

不定積分は限定積分と任意の定数の和として表現することができる。区間$[0,x]$が連続ならば、

$$\int f(x)dx = \int_0 f(x)dx + c \qquad （c\text{は任意の定数}） \qquad (7.24)$$

と書くことができる。限定積分の結果にcを加えれば不定積分になる。

不定積分の計算の主な公式を次に挙げておく。積分定数は省略する。

導関数	原始関数		
$y=0$	$\int 0dx=0$		(7.25)
$y=k$	$\int kdx=kx$	ただし、kは定数	
$y=x^a$	$\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}$	aは$a\neq -1$の定数	
$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$	$\int x^{-1}dx=\log\lvert x\rvert$		
$y=e^{ax}$	$\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}$	aは$a\neq 0$の定数	
$y=\log\lvert x\rvert$	$\int \log\lvert x\rvert dx=x\log\lvert x\rvert-x$		
$y=\sin ax$	$\int \sin ax dx=-\frac{1}{a}\cos ax$		
$y=\cos ax$	$\int \cos ax dx=\frac{1}{a}\sin ax$		

$\int\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

$\int af(x)dx=a\int f(x)dx$　　ただし、aは定数

定積分の定義から直ちに次の公式が得られる。ただし、区間$[a,b]$は連続とする。

$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

$\int_b^a\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_b^a f(x)dx\pm\int_b^a g(x)dx$

$\int_b^a kf(x)dx=k\int_b^a f(x)dx$　　ただし、kは定数

$\int_b^a f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$　ただし、cは任意の定数

7.15 広義積分

　これまで述べてきた定積分は積分する区間が連続でなければ計算することができないが、ここでは、それ以外の場合に定積分の概念を拡張する。関数が積分する区間で連続であるとは$v(t)$が切れ目のない曲線で表されるということであるが、例えば、$v(t)=1/t$のよう

な場合、区間$[-1,1]$で連続ではない。$t=0$のとき、$v(t)$は不定になるからである。

このような積分は区間を分割し連続な区間の定積分の和として計算する。このようにして計算する積分を広義積分という。分割される積分の型には次の４つがある。

$v(t)$が$(a,b]$で連続の場合　$\int_a^b v(t)dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b v(t)dt$　（7.26）

$v(t)$が$[a,b)$で連続の場合　$\int_a^b v(t)dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} v(t)dt$

$v(t)$が$[a,+\infty)$で連続の場合　$\int_a^{+\infty} v(t)dt = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b v(t)dt$

$v(t)$が$(-\infty,b]$で連続の場合　$\int_{-\infty}^b v(t)dt = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b v(t)dt$

ただし、$(a,b]$のような表現は、aを含まない区間ということである。

これらの積分において、極限値が存在するとき積分は収束するといい、極限値が存在しないとき発散するという。

積分区間の分割は、例えば、0を含まない区間$[-1,1]$は、$[-1,0)$と$(0,1]$の区間に分けて計算する。すなわち、

$$\int_{-1}^1 v(t)dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon} v(t)dt + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^1 v(t)dt$$

のようにして計算する。例えば、$v(t)=1/t$である場合の区間$[-1,1]$の広義積分は、

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{t}dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}dt + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{t}dt$$

とされる。このような積分に対して、数学者（すべてではないかも知れないが）は次のように考えている。この式の右辺を計算すると、

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{t}dt=\lim_{\varepsilon\to+0}[\log|t|]_{-1}^{-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\log\varepsilon=-\infty$$
$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{t}dt=\lim_{\varepsilon\to+0}[\log|t|]_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to+0}(-\log\varepsilon)=+\infty$$

であり、これら２つを加えると全区間の積分になるが、

$-\infty+\infty=$未定義

であるから、この積分は一定の値にならないと結論する。
　このような結論は余り関心しない。この積分は0であるべきだ。このことを証明しよう。

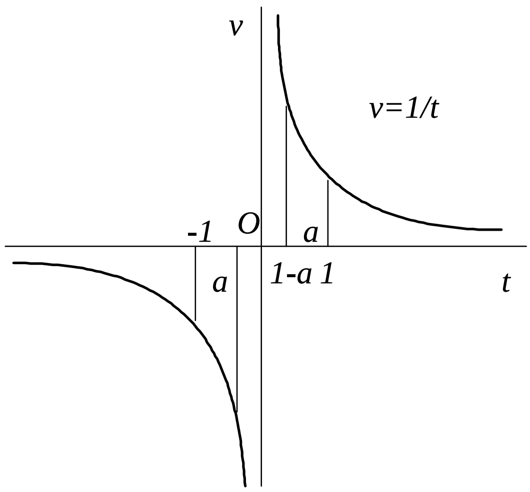

図7.6 広義積分

aが$0<a<1$の値を持つとすれば、0を含まない区間$[-1,0)$と$(0,1]$での定積分は、それぞれ、

$$\int_{-1}^{-1+a}\frac{1}{t}dt \tag{7.27}$$
$$\int_{1-a}^{1}\frac{1}{t}dt=-\int_{1}^{1-a}\frac{1}{t}dt \tag{7.28}$$

である。図から明らかなように、$1/t$のグラフは原点Oに対して対象であり、面積である式(7.27)の絶対値と式(7.28)の絶対値は等しい、式(7.27)は負になるから、式(7.27)と式(7.28)の和は常に0である。すなわち、

$$\int_{-1}^{-1+a}\frac{1}{t}dt-\int_{1}^{1-a}\frac{1}{t}dt=0 \qquad (7.29)$$

である。aは$0<a<1$の範囲で任意であるから、$a\to 1$の極限においても式(7.29)は成立している。この極限が、区間$[-1,1]$の積分になるから、

$$\lim_{a\to 1}\left(\int_{-1}^{-1+a}\frac{1}{t}dt-\int_{1}^{1-a}\frac{1}{t}dt\right)=0$$

であり、区間$[-1,1]$の積分はゼロである。極限に関する公式

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

と書けるのは、$\lim_{x\to a}f(x)$と$\lim_{x\to a}g(x)$に極限値が存在する場合であり、発散する場合は、

$$\lim_{a\to 1}\left(\int_{-1}^{-1+a}\frac{1}{t}dt-\int_{1}^{1-a}\frac{1}{t}dt\right)=\lim_{a\to 1}\int_{-1}^{-1+a}\frac{1}{t}dt-\lim_{a\to 1}\int_{1}^{1-a}\frac{1}{t}dt \qquad \times$$

と書くことは正しくないのである。一般に広義積分の分割された区間が発散する場合は、分割された区間の和をその広義積分の値と見なすことはできない。

7.16 ベクトルの積分

ベクトルの微分の場合と同様に、ベクトルは３つのスカラーの関数と見なすことができるから、ベクトルの積分は、スカラーの積分と同様に計算することができる。例えば、ベクトル$\boldsymbol{v}(t)$のtによる積分は、

$$\int \boldsymbol{v}(t)dt$$

と書く。ベクトル$\boldsymbol{v}(t)$を$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$とおけば、

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{v}(t)dt &= \int(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k})dt \\ &= \int v_x\boldsymbol{i}dt + \int v_y\boldsymbol{j}dt + \int v_z\boldsymbol{k}dt\end{aligned}$$

である。$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$は定数と見なせるから、

$$= \boldsymbol{i}\int v_x dt + \boldsymbol{j}\int v_y dt + \boldsymbol{k}\int v_z dt$$

である。$\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{v}(t)dt$とおけば、$\boldsymbol{r} = r_x\boldsymbol{i} + r_y\boldsymbol{j} + r_z\boldsymbol{k}$であるから、

$$\begin{aligned}r_x &= \int v_x dt \\ r_y &= \int v_y dt \\ r_z &= \int v_z dt\end{aligned}$$

となり、ベクトルの積分はスカラの積分の関数に帰結できる。