

第12章 万有引力の法則

この章ではニュートンの万有引力の法則に関連した保存力場の概念について説明することにしよう。この章で述べられることは特に新しいというものではないが、重力の理論について考えるためには基本的な概念として認識しておく必要があるだろう。

この章の最後の方では、第5章で問題であった運動エネルギー保存の法則と運動量保存の法則の正しい関係についても述べられる。また、特殊相対性理論の代案を運動エネルギーや位置エネルギーという概念を用いて述べることにしよう。

12.1 座標系の設定

重力のあるような特定の場所では、慣性加速度はゼロではないから、その場所は厳密には慣性座標系ではない。質量のある物体が存在していれば、その近傍には重力場があることになるから、その周りも厳密には慣性座標系ではない。厳密な慣性座標系というものは存在しているのであろうか。例えば、球殻の内部での重力は至る所でゼロであることが数学的に証明されている。このような考えを取り入れれば、球殻の内部は厳密な意味での慣性座標系あるいは波動慣性座標系ということになるであろう。

慣性座標系であれば、物体を初速度 v_0 で動かせば、その座標系の範囲内において、その速度で等速直線運動するから、その座標系に目盛りをつけることができる。物体の運動を基準にして、等時間間隔毎に目盛りを座標軸に付けていけばよい。等時間間隔を得るためには、例えば、物体を回転させたりして、その回転周期を利用すればよい。

重力場などに設定された非慣性座標系でも、慣性座標系のように簡単に座標軸の目盛りを付けることができるだろうか。時間は第1章で述べた共通時間を用いれば、共通の時間を定めることはできる

が、長さの測定は、重力場の中では、一般に、物体は等速直線運動するわけではないから、物体を一定の速度で運動させることは困難である。光も、重力場の中では曲げられる（曲げられるということは速度が変化するということである）と考えられているから、光を基準にして長さを測るということも安易に肯定することはできない。剛体のような物差しを使って、長さを測るという方法もあるが、この長さは重力の大きさによって変化する可能性がある。物体に力を加えれば一般に物体は縮むからである。このように物体の長さは、空間の状態に依存すると考えられるが、空間の状態に依存しない長さの測り方というものもないわけではないことをわれわれは第3章で見いだした。その方法は三角測量の方法を使うものであった。この方法を用いれば、直接、測定しようとする空間の状態に依存せず、相対的な長さの違いを測ることができた。しかし、この方法を用いるためには、その計測しようとする場所から、物体の位置を示す光などを放出する必要があり、この光が曲がる可能性があるため、厳密にはこの方法でも正確に等間隔の距離を測ることはできないことになる。結論として、現在のわれわれには空間の状態に依存しない等間隔の距離を厳密に測る方法はわからないということを認めなければならない。しかし、測定の方法はわからなくても、重力場内に置いた目盛りの付いていない物差しのどこかに、等間隔という長さの目盛りはあるはずである。例えば、銀行強盗の犯人の手がかりがまったくなくても、その犯人は既に死んでいるか、全宇宙のどこかに必ずいるということはわかる。だから、厳密な測定の方法はわからなくても、そのような目盛りを付けた座標系というものは存在しうるはずである。このような考えはニュートンの絶対空間のようであるが、この目盛りは三角測量の近似の範囲内で定めうるものであり、まったく根拠がないというものではない。所詮、物理法則など全て近似であるし、慣性座標系とて、その座標系内に質量を持った物体が一つでもあれば、厳密には慣性座標系ではなくなるのである。

われわれは、重力の存在を認めたこの近似的な慣性座標系のことを重力慣性座標系とよぶことにし、このような座標系の存在を認めることにしよう。このような座標系は、今まで、ニュートン力学で一般的に使われてきた絶対空間的な座標系と基本的に同じであるが、既存の物理学では、重力のある場所での時間は場所によって異なるかもしれないと考えられていたが、この時間に共通時間を用いることによって厳密に等しいとする点と、重力場内の物体の長さは、場所によって変化する可能性があるが、この座標系の長さの尺度は、物体の長さや運動に依存するものではないとする点である。

12.2 万有引力の法則

ニュートンによって発見された万有引力の法則は、二つのものの間の引力の大きさは、おのおのの質量に比例し、その距離の自乗に反比例するというものである。数式的に書けば、

$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad (12.1)$$

というものである。この中に現れた G は、比例定数の一種で重力定数とよばれている。その値は、

$$G = 6.6726 \times 10^{-11} [N \cdot m^2 / kg^2]$$

である。この値は、キャベンディッシュの実験により、実験的に求められているものである。式(12.1)をベクトル的に書けば、

$$\mathbf{F} = G \frac{mM}{r^2} \mathbf{r}_0 \quad (12.2)$$

ただし、 \mathbf{r}_0 は、 r 方向の単位ベクトル

と書かれる。

12.3 万有引力の法則の場としての表現

ニュートンの万有引力の法則は二つの質量を持った物体の間に生じる引力の大きさを規定するが、その引力の効果は、離れた物体の間で瞬間的に伝わるのだろうか。万有引力の法則によれば、その引力は瞬間的に伝わるものとして記述されている。もし、引力の効果伝えるのに、何らかの時間がかかるとすれば、万有引力の法則は、伝播時間を無限大と見なした近似において成立する法則であるということができる。あるいは、伝播時間が無限大ではなくても、このような法則が成り立つ場合もある。それは、問題とする物体が動いていない場合であり、この場合は伝播時間がかかっても、伝播する効果に変化がないと見なすことができるから、伝播時間を考慮する必要はない。したがって、引力発生之源の物体が動かないとする近似（静的な重力場）においても、万有引力の法則は正しいということができるだろう。

万有引力の法則は、質量を持った二つの物体が、真空を隔てて、瞬間的に力を及ぼし合うということを数学的に記述したものである。真空というものは何もない空間であると考えられているが、このように力を媒介する何らかの物質が無くても、作用を及ぼすことができるという考えを遠隔作用という。それに対して、真空中を何らかの力を伝える効果が伝播していき、その効果が物体に働くことによって、力が働くといった考えを近接作用という。真空というものは何もない空間かもしれないが、明らかに重力という効果を伝えるという機能を持っている。

万有引力の法則は重力之源に近いほど、その引力は強いということ述べているものであり、このような状態を場として記述することができる。物体の質量の大きさによって、その周囲への重力の勢力の及ぼし方は異なってくる。すなわち、重力場の様子が異なってくる。重力場を量的に表現するには、元の重力分布を乱さないよう

に、重力場の一点に単位質量を持ってきたときに、これに働くであろう力を考えればよい。

例えば、運動していないと見なせる惑星のような重力場の中の任意の場所 h での、質量 m_P の物体 P に働く力はフックの法則あるいはニュートンの運動の第二法則で測ることができる。この物体を落下運動させたときの力を F_P 、物体 P の加速度を a とすれば、その力は、

$$F_P = m_P a$$

となる。質量 m_P が惑星の質量に対して十分小さいとすれば、物体 P がつくる重力場は、惑星の重力場をほとんど乱さないと考えることができるだろう。次に質量 m_Q の別の物体 Q を同じ場所から落とすとする。 m_Q はあまり大きくないとすれば、物体 Q の加速度は P と同じ加速度 a であることが実験によって確かめられている。すなわち、このときの力 F_Q は

$$F_Q = m_Q a$$

である。したがって、

$$a = \frac{F_P}{m_P} = \frac{F_Q}{m_Q} \quad (12.3)$$

であり、この加速度 a は重力場内の場所 h に依存する量であることがわかる。

F_P, F_Q はニュートンの運動の第二法則を用いず、フックの法則などで直接的に測ることもできる。この場合は、物体を落下運動させる必要はなく、加速度 a を用いずとも、

$$E_g \equiv \frac{F_P}{m_P} = \frac{F_Q}{m_Q} \quad (12.4)$$

の関係を得ることができる。この E_g を重力場の強さと呼ぶことにしよう。

精密に重力場の強さを定義するには、元からあった重力場を乱さないようにするために、極めて微量の質量をもって来た際に、これに働く力を単位質量あたりに換算すればよい。すなわち、

$$E_g = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{F(\Delta m)}{\Delta m} \quad (12.5)$$

として与えられることになる。これを単位質量あたりに換算すれば、

$$F = mE_g \quad (12.6)$$

ということになる。この E_g は、式(12.2)との対応から、

$$E_g = \frac{GM}{r^2} \mathbf{r}_0 \quad (12.7)$$

である。この E_g という量は、式(12.3)と式(12.4)の対応で明らかのように、 r における重力加速度という量と同じである。すなわち、

$$\text{重力場の強さ} = \text{重力加速度} \quad (12.8)$$

である。

12.4 静止している物体の加速度

第8章や第10章で、加速度という概念について様々な視点から論じてきたが、ここでさらにこの概念についての認識を深めることにしよう。第8章では、静止している物体の加速度というものは考えることができないと述べたが、本当はこのような加速度も考えることができる。式(12.3)や式(12.4)は加速度というものを表しているが、加速度というものは力/質量と定義することも可能だからである。加速度というものを時間の関数であると考えたと物体が動いていないとき、その加速度はゼロであると結論しなければならないが、加速度が力/質量と考えると、その加速度は物体が動いていないときでも、加えられている力がゼロでなければ存在しうるのである。このような加速度を静止加速度と呼ぶことにしよう。この静止加速度を用いれば、物体が動かないときに加えられている力に対して、

$$F = ma_0$$

ただし、 a_0 は静止加速度

と置くことができる。

12.5 保存力場

A から B までの間に力 F のする仕事 W_{AB} は、式(11.16)より、

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{再(11.16)}$$

と書くことができる。この式に式(12.6)を代入すると、

$$W_{AB} = \int_A^B m\mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s}$$

である。さらに $m = 1$ と置いた場合は、

$$\varphi_{AB} = \int_A^B \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s} \quad (12.9)$$

となる。 φ_{AB} は場 \mathbf{E}_g において、単位質量を A から B まで運ぶに要する仕事である。

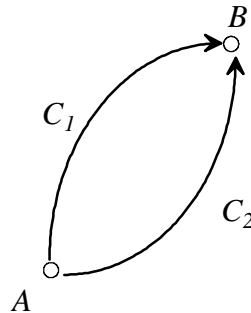


図12.1 線積分の経路

2点 A, B を結ぶ異なる2つの経路 C_1, C_2 を考えると、一般の場合には、それらに対応する線積分は異なった値となるが、この線積分の値が C_1, C_2 で同じとき（線積分の値が始点 A と終点 B のみに依存するとき）ベクトル場 \mathbf{E}_g は保存的であると言われ、このベクトルが力の場であるとき、この場を保存力場という。ベクトル \mathbf{E}_g が保存的なベクトルであるための条件は、

$$\text{rot} \mathbf{E}_g = 0$$

の場合であり、かつそのときに限られる。

C_1, C_2 の線積分の差は、

$$\varphi_{C_1} - \varphi_{C_2} = \int_{C_1} \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s}$$

であるが、 $\varphi_{C_1} - \varphi_{C_2}$ がゼロのとき E_g は保存力場である。 C_2 に関して、同じ経路を通り方向を B から A とした経路 C'_2 は、

$$\int_{C'_2} \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s} = - \int_{C_2} \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s}$$

であるから、 $A \rightarrow B \rightarrow A$ の閉路を C とすれば、

$$\varphi_{C_1} - \varphi_{C_2} = \oint_C \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s} + \int_{C'_2} \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s}$$

である。したがって、

$$\oint_C \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s} = 0$$

の場合が保存力場である。すなわち、保存力場とは、ベクトル E_g の力を受ける場で、1周回った線積分がゼロになる力場である。ストークスの定理、式(11.40)は、

$$\oint_C \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot } \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{S}$$

であるから、保存力場の場合は、

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{S} = 0$$

であり、

$$\text{rot } \mathbf{E}_g = 0$$

となっていなければならない。

逆に言えば、ベクトル E_g の回転がゼロでない場合、

$$\text{rot}E_g \neq 0$$

のようなベクトル場 E_g は保存的なベクトルではない。すなわち、ベクトル E_g が回転状の力のベクトルであるとき、その場は保存力場ではない。だから、回転している惑星のつくるような場は保存力場ではない。

地球は24時間かけて1周するから、回転速度としてはとても遅く、地球を回転していない静的な重力場であると見なすことができるだろう。また、地球上で実験を行うということは、その場所と地球の回転速度との相対回転速度はゼロであるから、地球の回転の影響はほとんど受けないと考えることができるだろう。地球上で観測される地球がつくる重力場には、 $\text{rot}E_g = 0$ が成り立っており、このような場は保存力場であると見なすことができる。このようなことは実験によって確かめることができる。例えば、地球重力場内に環状のルートを設定、この周回路に沿って物体を運動させるとする。この周回路を回る方法は2通りあり、一方を右向き、もう一方を左向きとよぶことにすれば、同じ物体を同じ初速度で運動させ、1周して戻ってきたときの速さが、右向きと左向きで同じとき、その周回路は保存力場である。ただし、回路の抵抗は無視している。このような実験を地球重力場内の様々な場所で、周回路を傾けて実験してみても、右向きと左向きで速さの差は生じない。もし、この速さに差が生ずるならば、地球重力場からエネルギーを取り出すことができることになる。

さらに簡単な実験の方法としては、自由に回転することができる均等な質量分布の円盤を地球重力場内の様々な場所に設置し、その円盤が回転しだすならば、その場所は保存力場ではなく、回転しないならば、その場所は保存力場である。ただし、回転抵抗はないものとする。

12.6 風の保存力場

保存力場というものは、一般の力に対して適用できる概念であるから、その力場は重力場だけではない。例えば、風の間というものも考えることができる。風というものは、それが当たった物体に力を及ぼすことができるから、風の間というもの力場であり、その力を F_w と書くと、仕事が定義でき、

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}_w \cdot d\mathbf{s}$$

と書くことができる。この風の間が保存力場であるための条件は、

$$\text{rot} \mathbf{F}_w = 0$$

の場合であり、例えば、渦のない一定の方向に吹いている風の間は保存力場である。この風の間の中に、図12.2のような風車を設置してもこの風車は回転しない。

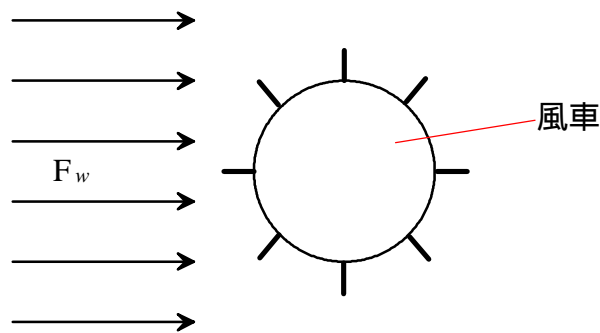


図12.2 風の保存力場

重力場のような保存力場からはエネルギーを取り出すことはできない、と一般的には考えられているが、この風の保存力場からエネルギーを取り出す方法は誰でも知っている。プロペラのような風車

を風の力場の中に設置すればよい。このプロペラの周囲の風の場は、風がプロペラに当たることによって、風の力の方向が変化し、局所的に保存力場ではなくなったと考えることができる。したがって、風の場においても保存力場からエネルギーを取り出しているわけではないことになるが、プロペラという装置を設置することによって、保存力場を非保存力場に変換したということになる。保存力場を非保存力場に変換し、エネルギーを取り出したということは、結局、保存力場からエネルギーを取り出したということである。

だから、昔の科学者が保存力場である重力場からエネルギーが取り出せると考えたことは、現代人が考えているように、決して馬鹿げたことではない。もし、重力場においても風の場における風車のようなまい機構があれば、重力場からエネルギーを取り出すことができるはずだ。このような機構はあるのだろうか。昔の科学者は皆、このような装置を作りたがっていた。そして、そのことに真剣に取り組んでいた。しかし、誰でも知っているように、このような装置を実際に作った人はまだいない。

普通の間人は懸命に努力しても報われないとき、その努力を中断したいと思うものであるが、何の理由もなく撤退することは、いまままで投資してきた努力がまったく無意味になるため、撤退するにも何か理由をつけなくてはならなくなる。そこで行われることは適当な理由をでっち上げることである。例えば、このような装置は物理的に決して実現することはできない、といった結論を得たとでっち上げる。このことが本当ならば、その装置が実現できないことは、その人の責任ではない。その人がその仕事に取りかかる前に、そのことが実現できないことは既に決定されていたからである。あるいは「無から有を生じない」などと述べて、科学者から哲学者に変身してしまうことにする。あるいは「神がそのようなことは認めるはずはない」などと言い宗教家に変身する。真面目な人は、そのことが実現できないのは自分が無能だからだと自覚し自信を失う。これらの方法は、どれも賢明な方法ではない。

現代の状況は、過去の科学者のでっち上げに騙されてしまって、ほとんどすべての人はこのような装置は実現できないと思っている。結論を言ってしまうと、序文でも述べたようにこのような装置を実現することは可能であるとわれわれは考えている。読者の方はどのような装置なのか早く知りたいと思うだろう。勿体つけるわけではないが、まだ、この機構について説明するための十分な準備が整っていないから、ここで述べるわけにはいかない。このことについては、第15章にて述べることにしよう。ここで言いたかったことは後に述べる力学的エネルギー保存の法則というものは、保存力場からエネルギーを取り出せないといったことを述べるものではないということである。

12.7 位置エネルギーという概念

物体を持ち上げるにはエネルギーがいる。だから、高いところにある物体は低いところにある物体より多くのエネルギーを持っているという考えがある。それでは、無限に高いところ（重力の源から無限に離れた場所）では、無限のエネルギーを持っているかといえ、そんなことはない。無限に離れた場所（無限遠点）の引力は無限に小さいことになるから、その引力はほとんどゼロであると見なすことができる。この無限遠点を基準にすれば、重力の源に近い場所にある物体の方が遠い場所にある物体より、無限遠点へ物体を運ぶには、エネルギーが多く必要である。逆にいえば、重力の源に近い場所にある物体の方が多くの場のエネルギーが加えられていることになる。このように考えると低いところにある物体の方が高いところにある物体より多くのエネルギーを持っていることになる。

場のエネルギーという量を考えるには、無限遠点を基準にするのが都合がよい。この場所のエネルギーはゼロであると見なせるからである。重力の源に近い場所には、このような都合のよい場所は存在していない。例えば、地球表面上などを基準とし、その場所の位置のエネルギーをゼロと見なす方法もあるが、このような方法は重

力加速度という量が、高さによって変化しないとする近似においては、比較的簡単に現象を記述することができるが、高さによって変化するとすれば、地球表面上を基準としては簡単な方法で記述することはできない。

電気力学には、電位（第13章参照）という量があるが、重力の力学でもこのような概念に相当する量は当然ある。このような量は重力ポテンシャルあるいは単にポテンシャルと呼ばれる。このポテンシャルという量を φ_g と書けば、次のように定義することができる。

$$\varphi_g = -\int_{\infty}^r \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s} \quad (12.10)$$

ここに現れた負号は、重力の源から、無限遠点へ向けた方向を正方向とすると、重力加速度の方向はその反対であるので、マイナス符号が付くことになるということである。方向の取り方は、便宜的なものであるから、この式の負号を取り除いた表現というものも別に間違っていない。

この式の物理的な意味は、 E_g の場において、単位質量の物体を r の位置から無限遠点に運ぶに要する仕事ということである。保存力場においては、 r から ∞ （無限遠点）へ至る経路によらず φ_g の大きさが定まるから、 φ_g は空間中の位置 r の関数であると見なすことができる。 E_g の方向と、物体の運動方向が同じならば、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{s} &= E_g ds \\ ds &= dr \\ E_g &= \frac{GM}{r^2} \end{aligned} \quad (12.11)$$

という関係があるから、式(12.10)を計算すると、

$$-\int_{\infty}^r \frac{GM}{r^2} dr = -\left[-\frac{GM}{r}\right]_{\infty}^r = \frac{GM}{r} - \frac{GM}{\infty} = \frac{GM}{r}$$

である。すなわち、球形と見なせる質量 M の物体の中心から r の位置のポテンシャル $(\varphi_g)_r$ は、

$$(\varphi_g)_r = \frac{GM}{r} \quad (12.12)$$

となる。重力場の強さとポテンシャルの関係は、

$$\mathbf{E}_g = -\text{grad } \varphi_g = -\nabla\varphi_g \quad (12.13)$$

である。 E_g を空間積分した量が、 φ_g なのであるから、 φ_g を空間微分した量が、 E_g なのは当然である。

位置エネルギー U という量は、ポテンシャル φ_g で表される場所に、質量 m の点と見なせる物体を持っていくとき、その積で定義される量のことである。すなわち、

$$U = m\varphi_g \quad (12.14)$$

である。しばしば、位置エネルギーという量は、重力場内の位置の特性を示す量と考えられがちであるが、位置エネルギーという量は、その位置にある物体の質量に依存して変化するため、あまり適切とは言えない。それに対して、ポテンシャルという量は、重力場内の空間的な位置に対して固有の値を持つものであり、重力場内の位置の特性を示す量として適している。

12.8 ポテンシャルの物理的意味

第10章では、位置加速度という概念を空間積分すると位置速度という概念になることを発見した。重力場の強さや、重力加速度とい

う概念を得るのに、12.3では万有引力の法則を用いて、力という面に着目し、その概念を導いた。

この際、測定される力という量の代わりに加速度という量を用いても、同じことを測定することができる。式(12.11)で表される E_g という量は、重力の加速度であり、この加速度は空間の関数であると思なすことができるから、位置加速度の一種であると考えることができる。すなわち、式(10.6)の a と E_g は等しいと置くことができる。よって、

$$a = E_g \quad (12.15)$$

であり、式(10.6)と式(12.11)を代入し、この場合 $ds = dr$ であり、正方向を無限遠点に向けてとれば、

$$\frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \quad (12.16)$$

である。この微分方程式は変数分離型であり、単に積分すれば解くことができ、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v^2 &= -GM \int \frac{1}{r^2} dr \\ \frac{1}{2}v^2 &= \frac{GM}{r} + C \end{aligned}$$

となる。 $r = \infty, v = 0$ の初期値を与えれば、 $C = 0$ だから、

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} \quad (12.17)$$

$v_u = v$ と置いて、符号を選択すれば、

$$v_u = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (12.18)$$

となる。この v_u は空間の位置に対応する速度である。このような速度を重力速度あるいは重力速さとよぶことにしよう。重力速度の物理的な意味は、 $r = \infty, v = 0$ の初期条件から、重力場に向けて自由落下するとき、重力場内の空間的な位置 r における物体の落下速度である。

また、式(12.12)、式(12.17)から、

$$\varphi_g = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_u^2 \quad (12.19)$$

となり、ポテンシャルは速度の関数として、換算することができる。したがって、ポテンシャルのもう一つの物理的な意味は、物体の速度の初期条件を無限遠点においてゼロとした場合の重力場内の空間的な位置における物体の落下速度である。

12.9 重力速度の導出

重力速度は、12.8で述べた方法によらずとも得ることができる。重力場内の位置における万有引力の力はニュートンの運動の第二法則の力と等しいと見なし、質量 M の質点 P から距離 r の質量 m の質点 Q への万有引力の力は $m\frac{GM}{r^2}$ であるから、 P から Q への方向を正方向とすれば、

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -m\frac{GM}{r^2} \quad (12.20)$$

と書くことができる。両辺の m を除けば、

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad (12.21)$$

となる。このような関係は暗黙の内に肯定されてきたが、この関係は、ニュートンの運動の第二法則による力と万有引力の法則による力を直接結びつけているものである。どうして、この二つの別々の力を等しいと見なすことができるのだろうか。それは例えば、式(12.3)や式(12.4)のような実験を試してみればわかる。式(12.21)の両辺は加速度というものを表しているが、加速度というものは力/質量と定義することも可能で、このように表現すると、ニュートンの運動の第二法則の加速度と万有引力の法則の加速度は全く同じ形式(力/質量)で表現することができるからである。

$$v = \frac{dr}{dt} \text{ とおくと、 } \frac{d^2r}{dt^2} = v \frac{dv}{dr} \text{ だから、式(12.21)は、}$$

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}$$

$$v dv = -\frac{GM}{r^2} dr \text{ (変数分離型)}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} + C$$

となる。 $r = \infty$ のとき $v = 0$ の初期条件を与えれば、すなわち、無限遠点において重力によってのみ加速された場合は $C = 0$ だから、

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} \tag{12.22}$$

となる。この結果は式(12.17)と同じであるから、

$$\varphi_g = \frac{1}{2}v^2$$

となる。

12.10 力学的エネルギー保存の法則

式(12.22)において、 $r = \infty$ のとき $v = v_0$ という初期値を与えれば、 $C = \frac{1}{2}v_0^2$ になるから、式(12.22)は、

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} + \frac{1}{2}v_0^2 \quad (12.23)$$

と書くこともできる。この両辺に質量 m を書けたものが力学的エネルギー保存の法則といわれているものである。すなわち、

$$\frac{1}{2}mv^2 - m\frac{GM}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (12.24)$$

この方程式の左辺第1項は運動エネルギー、第2項は位置エネルギーとよばれている。右辺は一定で変化しないから、運動エネルギーを T 、位置エネルギーを U 、エネルギーを E で書いて、

$$T + U = E = \text{一定} \quad (12.25)$$

などと書かれることもある。

運動物体はエネルギーを持つ。それは、通常、運動量とよばれる量であり、 $P = mv$ と書かれる。なぜ、同じような量をわざわざ $T = \frac{1}{2}mv^2$ などと複雑な形に書かなければならないのだろうか。

元々、式(12.24)は、式(12.16)や式(12.20)から、得られたものであった。式(12.16)や式(12.20)はいわゆる微分方程式であるが、式(12.24)は代数方程式である。微分方程式より代数方程式の方が簡単なので、運動物体のエネルギーを mv を使わず、 $\frac{1}{2}mv^2$ と書いただけである。勿論、式(12.24)と同じようなことを mv を使って書くこともできる。式(12.20)から、

$$\frac{d(mv)}{dt} = -m\frac{GM}{r^2} \quad (12.26)$$

と書いておけばよい。

$\frac{1}{2}mv^2$ を v で微分すると mv になるから、運動エネルギー T と運動量 P には、

$$\begin{aligned} P &= \frac{dT}{dv} & (12.27) \\ T &= \int P dv \end{aligned}$$

といった関係がある。式(10.8)の関係から、

$$\frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{ds} = \frac{d(mv)}{dt}$$

であるから、

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dP}{dt} \quad (12.28)$$

と書くこともできる。運動量という量を時間で微分すると力になるが、運動エネルギーという量を空間で微分しても力になる。時間で微分された量というのは時間の関数になるが、空間で微分された量は空間の関数になる。位置エネルギーという量は、空間の関数であるから、運動量という時間の関数で比較するより、運動エネルギーという空間の関数で比較する方が計算が簡単である。式(12.24)を力という量で表現すれば、

$$\frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dr} - \frac{d(m\frac{GM}{r})}{dr} = \frac{d(\frac{1}{2}mv_0^2)}{dr} \quad (12.29)$$

となる。この式の各項はそれぞれ力を表し、この式は力学的エネルギー保存の法則の力による表現であり、式(12.16), 式(12.20), 式(12.24)と等価な表現である。

式(12.24)は、式(12.19)から、次のように書き換えることができる。

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_u^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (12.30)$$

左辺第1項の v は、物体が自由落下しているときの速度であり、第2項の v_u は物体が自由落下するときの速度を利用して、空間の関数として定めた速度であるから、 $v_0 = 0$ の初期値を与えれば、 $v = v_u$ となるのは当たり前である。この式(12.30)は、任意の運動における、運動エネルギーと位置エネルギーの関係を与えるものではなく、自由落下している場合のみに適用できるものである。例えば、重力場内の適当な場所に物体が静止していれば、 $v = 0$ になるが、これを式(12.30)に代入すると、 $v_u^2 = -v_0^2$ になる。このようなことは勿論正しくない。

運動エネルギーという量の絶対値というものと位置エネルギーという量の絶対値というものを加えたものが全エネルギーである、と考えるならば、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv_u^2 = \frac{1}{2}mv_e^2 = E \quad (12.31)$$

ただし、 v_e は全エネルギーの換算された速度、 E は全エネルギー

と表されるだろう。例えば、重力場内の適当な場所に物体が静止していれば、 $v = 0$ になるから、 $E = \frac{1}{2}mv_u^2$ となり、その物体の全エネルギーは位置エネルギーのみであるということになる。式(12.31)は重力場内で任意の運動をする物体の全エネルギーと考えことができるだろう。

12.11 運動エネルギー保存の法則とは何か

第5章で運動量保存の法則と運動エネルギー保存の法則とよばれる法則の関係について言及したとき、既存の物理学の考えは誤っていることを指摘した。その誤りとは、

$$P = |m_1 v_1| + |m_2 v_2| + \dots + |m_n v_n| \quad (12.32)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_n^2 \quad (12.33)$$

の両式が両立するというものであった。

何が間違っているのだろうか。式(10.8)は、

$$\frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{ds} = \frac{d(mv)}{dt}$$

と表されたが、この式を積分形式に書き換えると、

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int mv \frac{ds}{dt} = \int mv dv \quad (12.34)$$

である。運動量保存の法則(12.32)の一つの例として、

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 + m_3 v_3 \quad (12.35)$$

と書くことができるが、この式を v で積分すると、

$$\int m_1 v_1 dv = \int m_2 v_2 dv + \int m_3 v_3 dv \quad (12.36)$$

となる。この式は v で積分できないが、 v_1, v_2, v_3 は v の関数であり、それらは、

$$v_1 = av \quad (12.37)$$

$$v_2 = bv$$

$$v_3 = cv$$

ただし、 a, b, c は比例定数

と置くことができる。これを式(12.36)に代入すれば、

$$\int m_1 av dv = \int m_2 bv dv + \int m_3 cv dv$$

となり、 v で積分することができる。積分すると、

$$\frac{1}{2}m_1 av^2 = \frac{1}{2}m_2 bv^2 + \frac{1}{2}m_3 cv^2 \quad (12.38)$$

となる。運動エネルギー保存の法則というものが正しいとすれば、

$$\frac{1}{2}m_1(av)^2 = \frac{1}{2}m_2(bv)^2 + \frac{1}{2}m_3(cv)^2 \quad (12.39)$$

とならねばならないが、式(12.38)と式(12.39)は等しくなく、式(12.32)と式(12.33)は両立しないのである。いったい運動エネルギー保存の法則というものの成立根拠とは何なのか。おそらく、式(12.30)のような結果を個別に運動する物体の相互の関係として成立すると乱暴に拡張したのであろう。式(12.30)は成立するが、この式は運動物体の速度と重力速度の関係を述べるものであって、運動物体相互の関係について述べるものではなく、この式から、式(12.33)のような結果は得られない。運動エネルギー保存の法則というものは間違っており、このようなものは法則ではなく、正しいものは式(12.38)の形式である。

式(12.38)を式(12.37)の項に戻せば、

$$\frac{1}{2}m_1 v_1 v = \frac{1}{2}m_2 v_2 v + \frac{1}{2}m_3 v_3 v \quad (12.40)$$

となるから、

$$m_1v_1 = m_2v_2 + m_3v_3$$

となる。この式は運動量保存の法則そのものであるから、式(12.38)の形式で書くことはほとんど無意味である。

12.12 光の速度による重力速度の表現

次に述べることは、後に述べる重力の理論に必要なものではない。だから、われわれにとってはあまり重要なことではない。われわれは第4章で特殊相対性理論をすっかり否定してしまったが、その代案は述べていなかった。特殊相対性理論の否定はわれわれの重力の理論に必要なことであるが、その代案は必要ではない。しかし、このような態度は少し不誠実なので、一応、その代案と思われることを述べておくことにしよう。

任意の質量を持ち運動する物体の重力場内の全エネルギーは式(12.31)で表されるだろうとわれわれは考えた。この式に光の運動というものも適用できると仮定すると、

$$\frac{1}{2}mc_r^2 + \frac{1}{2}mv_u^2 = \frac{1}{2}mv_e^2 \quad (12.41)$$

ただし、 c_r は重力場内の位置に対応する光の速度

である。無限遠点では $v_u = 0$ になるから、

$$\frac{1}{2}mc_r^2 = \frac{1}{2}mv_e^2 \quad (12.42)$$

となり、この場合光は一定の速度 c で伝播すると考えることができるであろうから、

$$v_e = c \quad (12.43)$$

である。この式を式(12.41)に代入すれば、

$$\frac{1}{2}mc_r^2 + \frac{1}{2}mv_u^2 = \frac{1}{2}mc^2 \quad (12.44)$$

である。すなわち、

$$c_r^2 = c^2 - v_u^2 \quad (12.45)$$

で、この式を書き換えると

$$c_r = c\sqrt{1 - \frac{v_u^2}{c^2}} \quad (12.46)$$

と書くことができる。この式によれば、重力ポテンシャルの大きい場所（重力場の源に近い場所）ほど、光はゆっくり進むということになる。時間の流れの尺度や長さの尺度を光の速度を利用して定めることにすれば、重力場の源に近い場所ほど、光はゆっくり進むのであるから、時間の流れはゆっくり進み、空間の長さの尺度も縮むと考えることができる。

また、無限遠点から初速度ゼロで自由落下してくる物体を、重力場内の適当な場所に静止させるためには、その場所の重力速度に見合うエネルギーで反対方向へ加速してやらねばならない。このとき、その物体に加速度計が設置してあったとすれば、静止直後の値は、その重力速度と等しい慣性速度を示すことになる。すなわち、一定の慣性速度で運動している物体というものは、その慣性速度に見合う重力速度の場所に静止している状態と同じであると見なすことができる。このように考えると慣性速度を持って運動している物体では、時間の流れはゆっくり進み、空間の長さの尺度も縮んでいると考えることができ、その関係は、式(12.46)の v_u を慣性速度と見なしたものであると考えることができる。

式(12.44)や式(12.46)において、 $v_u > c$ となると、 c_r は負になる。質量が大きく中心に集まっているような重力場では、 $v_u > c$ となる場所は実際にあるかもしれない。例えば、地球の周りで $v_u = c$ となる位置は、式(12.18) $c = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ より、

$$r = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.977 \times 10^{24}}{(3.0 \times 10^8)^2} = 8.86 \times 10^{-3} [m]$$

である。地球が、質量はそのまま針の先ほどに小さいとすれば、そこから8mmほどのところは、 $v_u > c$ となっていることになる。

そのような場所の時間や空間も負になるのであろうか。そんなことはわれわれにはわからない。また、考えることもあまり意味がない。現在の人類は火星にすら行けないのだから、このようなことは確かめようがないからである。